SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 CẤP THCS NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi: *17 tháng 01 năm 2025*
Thời gian làm bài: *150 phút*

Bài I (*5,0 điểm*)

1) Giải phương trình $3x+5-\left(x+4\right)\sqrt{x+1}=0$.

2) Cho a,b và c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\dfrac{a^2+1}{a}=\dfrac{b^2+1}{b}=\dfrac{c^2+1}{c}$. Tính giá trị của biểu thức $P=(a-b)(b-c)(c-a)$

Bài II (*5,0 điểm*)

1) Một công ty cần thuê xe để vận chuyển 100 tấn hàng. Đơn vị cho thuê xe chỉ có hai loại xe. Loại xe thứ nhất mỗi xe chở được 18 tấn hàng, có giá cho thuê là 18 triệu đồng một xe. Loại xe thứ hai mỗi xe chở được 12 tấn hàng, có giá cho thuê là 12 triệu đồng một xe. Hỏi chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển 100 tấn hàng là bao nhiêu?

2) Tìm các số nguyên dương x,y thỏa mãn $4x^3=y^3(x+y+2)$.

Bài III (*2,0 điểm*)

Cho a,b và c là các số thực không âm thỏa mãn $3(a^2+b^2+c^2)+2abc=12$.

a) Chứng minh $2a+bc\le 4$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4a+4b+c$.

Bài IV (*6,0 điểm*)

Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O), $\widehat{BAC}<60^\circ$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và D là điểm đối xứng với H qua đường thẳng BC. Kẻ đường kính CM của đường tròn (O).

a) Chứng minh MD là tia phân giác của góc $\widehat{BMC}$.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng CH và MB. Đường thẳng qua H và song song với đường thẳng BC cắt đường thẳng MD tại điểm P. Chứng minh $\widehat{ANP}=90^\circ$.

c) Đường thẳng AP cắt đường thẳng BC tại điểm E, đường thẳng BH cắt đường thẳng MC tại điểm F. Chứng minh EF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AP.

Bài V. (*2,0 điểm*)

1) Tìm các số nguyên dương x,y để $\dfrac{(x^2y-1)^2+9}{2y^2}$ là bình phương của một số nguyên tố.

2) Một số nguyên dương n được gọi là *có **tính chất T*** nếu nó viết được dưới dạng tổng của k số nguyên dương lẻ liên tiếp, với k là một số nguyên dương tùy ý lớn hơn 1.

a) Chứng minh rằng 2025 là một số *có **tính chất T***.

b) Tìm tất cả các số *có **tính chất T***.

---------------**Hết**---------------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh :……………………………………………………...Số báo danh :...……..……..……....

HƯỚNG DẪN GIẢI

Cao Văn Dũng – Tạ Khánh Hà – Nguyễn Văn Tâm – Nguyễn Đức Hải (CLB Toán Hà Nội HMC)

Bài I

1) Giải phương trình $3x+5-(x+4)\sqrt{x+1}=0$.

Điều kiện: $x\geq -1$. Đưa phương trình đã cho về $\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}-x-2\right)=0$.

Giải ra $x=3$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

2) Nếu trong ba số a,b,c có ít nhất hai số bằng nhau thì $P=0$.

Nếu ba số a,b,c đôi một phân biệt thì từ giả thiết suy ra $a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}=c+\dfrac{1}{c}$, nên

$a-b=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-b}{ab}$, do đó $ab=1$. Tương tự $bc=ca=1$ nên $a=b=c$, mâu thuẫn.

Vậy $P=0$.

Bài II

1) Gọi số xe 18 tấn và 12 tấn tương ứng là x (xe) và y (xe) $\left(x,y\in\mathbb{N}\right)$

Chi phí thuê xe là $18x+12y$ (triệu đồng)

Để chở hết 100 tấn hàng thì $18x+12y\geq 100$, mặt khác vì $18x+12y\,\vdots\,6$ nên $18x+12y\geq 102$.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x=5;y=1$ (thỏa mãn).

Vậy chi phí nhỏ nhất để thuê xe là 102 triệu đồng.

2) Giả sử $4x^3=y^3(x+y+2)$ thì $\left(\dfrac{2x}{y}\right)^3=2\left(x+y+2\right)\in\mathbb{N}^*$, dẫn đến $\dfrac{2x}{y}\in\mathbb{N}^*$ hoặc $\dfrac{2x}{y}$ vô tỉ.

Nhưng x,y nguyên dương nên $\dfrac{2x}{y}=k\in\mathbb{N}^*$. Dẫn đến $2x=yk$ và $k^3=yk+2y+4$.

Suy ra $y(k+2)=k^3-4=k^3+8-12=(k+2)(k^2-2k+4)-12$ nên

$$(k+2)(k^2-2k+4-y)=12.$$

Lại có $k+2\geq 3$ nên $k+2\in\left\{3;4;6;12\right\}$, ta có bảng sau:

$k+2$	3	4	6	12
$k^2-2k+4-y$	4	3	2	1
y	-1 (loại)	1	10	83
x		1	20	415

Thử lại, ta được $\left(x;y\right)\in\left\{\left(1;1\right);\left(20;10\right);\left(415;83\right)\right\}$.

Bài III

a) Từ giả thiết suy ra $a^2+b^2+c^2+\frac{2}{3}abc=4,$ suy ra $a^2+b^2+c^2\le 4,$ nên $0\le a,b,c\le 2$.

Ta có $0\le\frac{\left(a-2\right)^2}{2}+\frac{\left(b-c\right)^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2-\left(2a+bc\right)\le 4-\left(2a+bc\right).$

Do đó $2a+bc\le 4.$

b) Tìm min: Vì $0\le a,b,c\le 2$ nên $4=a^2+b^2+c^2+\frac{2}{3}abc\le\left(a+b+c\right)^2$, dẫn đến $a+b+c\ge 2$.

Từ đó $4a+4b+c\ge a+b+c\ge 2$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=0;c=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2.

Tìm max: Ta có

$$4=a^2+b^2+c^2+\frac{2}{3}abc=\left(a+b\right)^2+c^2+\frac{2}{3}\left(c-3\right)ab\ge\left(a+b\right)^2+c^2+\frac{1}{6}\left(c-3\right)\cdot\left(a+b\right)^2$$

(vì $c-3<0$). Dẫn đến $4\ge\frac{c+3}{6}\cdot\left(a+b\right)^2+c^2,$ suy ra $\left(a+b\right)^2\le\frac{24-6c^2}{c+3}$, hay $a+b\le\sqrt{\frac{24-6c^2}{c+3}}$

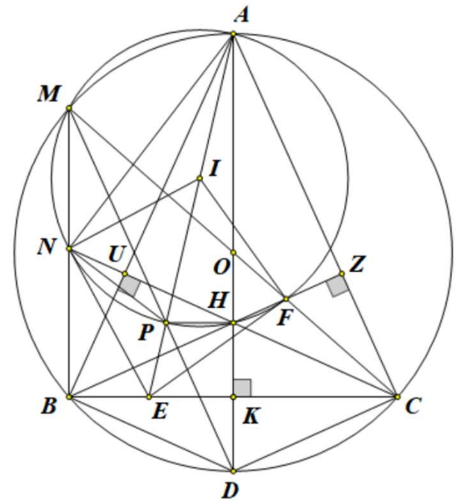
Suy ra $P=4\left(a+b\right)+c\le 4\sqrt{\frac{24-6c^2}{c+3}}+c$.

Mặt khác ta có $4\sqrt{\frac{24-6c^2}{c+3}}+c\le 8\sqrt{2}\Leftrightarrow c\left[c^2+\left(99-16\sqrt{2}\right)c+\left(128-16\sqrt{2}\right)\right]\ge 0$, luôn đúng.

Do đó $P\le 8\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\sqrt{2};c=0.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $8\sqrt{2}$.

Bài IV.



a) Xét tứ giác $BHCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường suy ra $BHCD$ là hình bình hành, mà $HD \perp BC$ nên $BHCD$ là hình thoi. Lại có H là trực tâm tam giác nên

$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ suy ra $D \in (O)$

Ta thấy: $MB / / AD$ (vì cùng vuông góc BC) nên

$\widehat{BMD} = \widehat{ODM} = \widehat{OMD}$

Suy ra MD là phân giác của góc $\widehat{BMC}$.

b) Ta thấy $\widehat{NBA} = \widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \widehat{PDA}.$

Lại có: $BNHD$ là hình bình hành nên $BN = DH,\ AB = MD.$

Suy ra: $\dfrac{BN}{BA} = \dfrac{DH}{DM} = \dfrac{DP}{DA}$, dẫn đến $\Delta ANB \backsim \Delta APD\ (c.g.c),\ \ \widehat{NAB} = \widehat{PAD}$

Suy ra: $\widehat{NAP} = \widehat{BAD}$. Từ đó $\Delta ANP \backsim \Delta ABD\ (c.g.c)$ và $\widehat{ANP} = \widehat{ABD} = 90^o$

c) Gọi U là giao CN và AB, K là trung điểm BC .

Từ câu b) ta có $\widehat{NAB} = \widehat{PAD}$, suy ra $\Delta ANU \backsim \Delta AEK\ (g.g)$, dẫn đến $\dfrac{AN}{AE} = \dfrac{AU}{AK}, \widehat{NAU} = \widehat{PAH}$

Vì $\widehat{NAE} = \widehat{UAK}, \dfrac{AN}{AE} = \dfrac{AU}{AK}$ nên $\Delta NAE \backsim \Delta UAK (c.g.c).$

Suy ra $\widehat{ANE} = \widehat{AUK}$, từ đó $\widehat{ENP} = \widehat{KUC} = \widehat{UCK} = \widehat{BAK} = \widehat{NAP}.$

Gọi I là trung điểm AP, Ta có $\widehat{INE} = \widehat{INP} + \widehat{ENP} = \widehat{INP} + \widehat{NAP} = 90^o.$

Suy ra EN là tiếp tuyến đường tròn đường kính $AP.$

Gọi Z là giao BH và $AC.$ Chứng minh được $\Delta BUN = \Delta CZF (ch - gn).$

Ta có $\Delta ANB = \Delta AFC (c.g.c)$ và AE là phân giác $\widehat{NAF}.$

Suy ra $\Delta NAE = \Delta FAE (c.g.c)$, dẫn đến $EN = EF.$

Do đó $\Delta ENI = \Delta EFI\ (c.c.c)$, suy ra $IF \perp EF$.

Suy ra EF là tiếp tuyến đường tròn đường kính AP .

Bài V

1) Giả sử $\dfrac{\left(x^2y-1\right)^2+9}{2y^2}=p^2$, với p là một số nguyên tố.

Suy ra $2p^2y^2=x^4y^2-2x^2y+10,$ dẫn đến $10\,\vdots\, y.$

Trường hợp 1: $y\,\vdots\,2$ thì $10=2p^2y^2-x^4y^2+2x^2y\,\vdots\,4$, loại.

Trường hợp 2: y lẻ thì $y\in\left\{1;5\right\}$. Xét mod 3, ta được $2p^2y^2=\left(x^2y-1\right)^2+9\equiv 0,1\pmod 3$, lưu ý $p^2y^2\equiv 0,1\pmod 3$, nên chỉ có thể xảy ra $p^2y^2\equiv 0\pmod 3$, mà y không chia hết cho 3 nên $p\,\vdots\,3$.

Do đó $p=3.$

Lần lượt thay $y=1;y=5,$ ta tìm được $\left(x;y\right)=\left(2;1\right)$.

2)

a) Ta có $2025=673+675+677$ nên 2025 là một số ***có tính chất T***.

b) Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: n chẵn.

Nếu n là số ***có tính chất T*** thì k phải chẵn nên trong tổng n sẽ có các cặp số lẻ liên tiếp nên chia hết cho 4. Do đó $n\,\vdots\,4.$

Ngược lại, nếu $n\,\vdots\,4$ thì $n=\left(\dfrac{n}{2}-1\right)+\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ là tổng hai số lẻ liên tiếp nên n là số ***có tính chất T.***

Trường hợp 2: n lẻ thì k lẻ.

Nếu n là số ***có tính chất T*** thì tồn tại $m\in\mathbb{N}$ để

$$n=\left(2m+1\right)+\left(2m+3\right)+...+\left(2m+2k-1\right)=\frac{1}{2}\left(2m+1+2m+2k-1\right)k=k\left(2m+k\right).$$

Để ý rằng $3\le k\le 2m+k$ nên n là hợp số lẻ.

Ngược lại, nếu n là hợp số lẻ thì $n=ab\ \left(a,b\in\mathbb{N}^*,3\le a\le b\right)$, khi đó ta tìm được $k=a;2m=b-a$ để n là số ***có tính chất T.***

Vậy tất cả các số ***có tính chất T*** là $n\,\vdots\,4$ và n là hợp số lẻ.